TENTAMEN QUANTUMFYSICA I
10 MAART 1998

Iedere vraag op een apart vel.
Naam, adres etc. op ieder vel.

Opgave 1 Beschouw een deeltje beschreven door de golffunctie

$$\psi(x,t) = (\tfrac{a}{\pi})^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}ax^2} e^{-iEt/\hbar}$$

a) Wat is de kans om het deeltje op een plaats x aan te treffen.
b) Is $\psi(x,t)$ genormeerd?
c) Wat is de verwachtingswaarde van x.
d) Wat is de verwachtingswaarde van p.
e) Geef de golffunctie in de p-representatie $\varphi(p,t)$.
f) Wat is de kans om de onder d) gevonden verwachtingswaarde van p inderdaad te meten.
g) Bepaal $\langle p^2 \rangle$.
h) Gebruik de onzekerheidsrelatie $\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}\hbar$ om $\langle x^2 \rangle$ te bepalen.

alle benodigde integralen kunnen afgeleid worden uit $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+ib)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Opgave 2 Beschouw een deeltje m in een potentiaal $V(x) = V_0\delta(x)$.

a) Toon aan dat op $x = 0$ de sprong in de afgeleide van de golffunctie gelijk is aan

$$(\tfrac{d\psi}{\delta x})_\epsilon - (\tfrac{d\psi}{\delta x})_{-\epsilon} = \tfrac{2m}{\hbar^2} V_0 \psi(0).$$

Beschouw nu een potentiaal gegeven door

$$V(x) = \tfrac{-\hbar^2}{2ma} V_0(\delta(x-a) + \delta(x+a)) \qquad V_0 > 0.$$

b) Geef de "matching"-condities in $x = \pm a$.
c) Geef de algemene uitdrukkingen voor de golffuncties van de laagste even en oneven toestand. Ga ervan uit dat beide toestanden gebonden zijn ($E < 0$) en gebruik de parameter k ($\hbar^2 k^2 = -2mE$).

d) Laat zien dat voor de even (ϕ_+) en oneven (ϕ_-) toestand geldt:

$$e^{-2ka} = \pm(2\frac{ka}{V_0} - 1)$$

e) Toon grafisch aan (schets) dat de even toestand sterker gebonden is dan de oneven toestand.
f) Laat zien dat voor $V_0 \gg 1$ het energieverschil gelijk wordt aan

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} V_0^2 e^{-V_0}$$

g) Beschouw een gebonden toestand waarbij op tijd t=0 het deeltje gelokaliseerd is nabij de linkerput $\langle x \rangle_{t=0} \approx -a$. Laat zien dat na een zekere tijd $t = T$ de verwachtingswaarde gelijk kan worden aan $\langle x \rangle_{t=T} \approx a$. Bediscussieer het verband tussen deze oscillaties en het bij f) gevonden energieverschil.

Opgave 3 Een unitaire operator U heeft de eigenschappen:

$$U^\dagger U = UU^\dagger = 1$$

Iedere willekeurige unitaire operator U kan ontbonden worden als:

$$U = \frac{U + U^\dagger}{2} + i\frac{U - U^\dagger}{2i} \equiv H_1 + iH_2$$

a) Laat zien dat H_1 en H_2 hermitische operatoren zijn. Is U ook hermitisch?
b) Laat zien dat $[H_1, H_2] = [U, H_1] = [U, H_2] = 0$.
c) Wat betekent dit voor de eigentoestanden van H_1 en H_2.
d) De eigentoestanden $|a_n\rangle$ van U vormen een orthonormaal complete set. Geef in Dirac-notatie aan wat dit betekent.
e) Laat zien dat de eigenwaarden u van U voldoen aan $|u| = 1$.